Εστω $X_1,\ldots,X_n$, τυχαίο δείγμα από κατανομή $f(x;\vartheta)$, όπου ϑ συμβολίζει άγνωστη παράμετρο.

(1) Να ορισθεί η έννοια του ομοιόμορφα ισχυρότατου ελέγχου μεγέθους α για την υπόθεση

$$H_0 : \vartheta \le \vartheta_0, \text{ έναντι της } H_1 : \vartheta > \vartheta_0$$

(2) Αν η $f(x;\mu)$ είναι η κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0, \text{ έναντι της } H_1 : \mu \ne \mu_0,$$

χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

(3) **Εστω ότι** $n = 1$, και ότι $f(x;\mu)$ είναι η κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση $\sigma^2 = 1$. Να εφαρμοσθεί το Θεμελιώδες Λήμμα Neyman-Pearson για να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή για τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = 0, \text{ έναντι της } H_1 : \mu = 1.$$

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς ώστε να έχουμε έλεγχο μεγέθους $\alpha = 0.05$, και να υπολογισθεί η αντίστοιχη ισχύς του ελέγχου. Δίνεται για την τυπική κανονική κατανομή ότι $P(Z \le 1.64) = 0.95$ και $P(Z > 0.64) = 0.26$.

(4) Εξηγήσατε γιατί η κρίσιμη περιοχή που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, αποτελεί κρίσιμη περιοχή ομοιόμορφα ισχυρότατου ελέγχου μεγέθους $\alpha = 0.05$, για τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = 0, \text{ έναντι της } H_1 : \mu > 0.$$

(5) Αν $f(x;\vartheta)$ είναι η Poisson κατανομή με παράμετρο ϑ, να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου ϑ, και να συγκριθεί η διακύμανση αυτής της εκτιμήτριας με το αντίστοιχο κάτω φράγμα Cramer-Rao.

(6) Αν $f(x;\vartheta)$ είναι η Poisson κατανομή με παράμετρο ϑ, να δειχθεί ότι η ασυμπτωτική κατανομή της $\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}} - \frac{1}{\vartheta}\right)$ είναι κανονική με μέσο μηδέν και διακύμανση $\frac{1}{\vartheta^3}$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 4 ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ