Θέμα 1ο

(α) (2 Μονάδες) Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής Χ

$$f(x;k,\theta) = x^{k-1}\frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} \text{ for } x \ge 0 \text{ and } k,\theta > 0,$$ όπου k γνωστή σταθερά.

Να υπολογισθεί η εκτιμήτρια της παραμέτρου θ με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, και να αποδειχθεί ότι είναι αμερόληπτη. Δίδεται ότι Γ(κ+1)=κΓ(κ).

(β) (2 Μονάδες) Σε ένα δείγμα 100 ατόμων (40 γυναίκες και 60 άνδρες) βρέθηκαν 45 πτυχιούχοι ΑΕΙ, εκ των οποίων οι 20 ήταν άνδρες. Να ελεγχθεί (σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05) εάν το ποσοστό πτυχιούχων ΑΕΙ είναι υψηλότερο στις γυναίκες.

(γ) (1 Μονάδα) Ισχύει η σχέση $z_{0.035} < z_{0.070}$; Δικαιολογήσατε την απάντησή σας.

Θέμα 2ο

(α) (2.5 Μονάδες) Μία τράπεζα επιθυμεί να ελέγξει τέσσερα υποκαταστήματα, ως προς τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης πελατών στο τμήμα καταναλωτικής πίστης. Επελέγησαν τρεις ημέρες και οι μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης που αντιστοιχούν σε κάθε κατάστημα, καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα. Ελέγξατε αν υπάρχει διαφορά στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης πελατών μεταξύ των καταστημάτων. Πως μπορείτε να πείτε πιο κατάστημα διαφέρει; Δίδεται: $\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 4028$, (Με *πλάγια*, στα περιθώρια του πίνακα, είναι τα μερικά αθροίσματα και τα τετράγωνά τους).

				T	T^2
Υποκατάστημα1	15	20	15	*50*	*2500*
Υποκατάστημα2	13	12	15	*40*	*1600*
Υποκατάστημα3	19	11		*30*	*900*
Υποκατάστημα4	23	27	30	*80*	*6400*

(β) (2.5 Μονάδες) Το ετήσιο οικογενειακό εισόδημα X σε κάποια αγροτική περιοχή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 10.000 € και διακύμανση 16.000.000 €^{2}.

i) Τι ποσοστό οικογενειών έχουν εισόδημα που δεν υπερβαίνει τα 6 χιλιάδες €;

ii) Σχεδιάζεται φορολογική πολιτική που θα αφορά το «πλουσιότερο» 10% του πληθυσμού της περιοχής. Ποιο είναι το ελάχιστο εισόδημα αυτού του πλουσιότερου τμήματος του πληθυσμού της περιοχής;

iii) Σχεδιάζεται ανακατανομή των εισοδημάτων της περιοχής με στόχο το μέσο εισόδημα να παραμείνει αμετάβλητο, αλλά να μειωθεί η ανισοκατανομή του εισοδήματος. Σε πιο επίπεδο πρέπει να μειωθεί η διακύμανση έτσι ώστε $P(9000 < X < 11000) = 0.40$

Θέμα 3ο

(α) (3 Μονάδες) Δέκα υποψήφιοι, που επιλέχθηκαν τυχαία από το σύνολο των υποψηφίων, έλαβαν τους παρακάτω βαθμούς στη Στατιστική (Υ) και στα Μαθηματικά (Χ):

Υ	10	18	22	32	33	38	47	55	60	75
Χ	12	18	28	26	37	32	40	40	66	53

Αν ένας υποψήφιος έλαβε 63 στα Μαθηματικά, αλλά ήταν απών στη Στατιστική, βρείτε την καλλίτερη σημειακή εκτίμηση του βαθμού Στατιστικής που θα ελάμβανε, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη παλινδρόμηση, αφού πρώτα ελέγξετε τη στατιστική σημαντικότητα (H_0: $\beta_1 = 0$, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05), του συντελεστή παλινδρόμησης. Δίδονται:

$\sum_{i=1}^{10} x_i = 352$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 390$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 14686$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 18924$ και $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 16344$

(β) (2 Μονάδες) Η πιθανότητα βαθμού άνω του 7 στη Στατιστική είναι 0.1. Αν στις εξετάσεις συμμετείχαν 100 φοιτητές/τριες, να υπολογισθεί η πιθανότητα να βαθμολογήθηκαν περισσότερα από 12 γραπτά με βαθμό άνω του 7.

Δίδονται: G(0,25) = 0,5987, G(0,50) = 0,6915 G(0,70) = 0,758, G(1)=0.8413, G(1,28) = 0,8997, G(1.645)=0.95, G(1,96)=0,975, G(2)=0,9772, $t_{8,\,0{,}025}$=2,306, $t_{80,\,0{,}05}$=1,664, $t_{25,\,0{,}025}$=2,060, $t_{11,\,0{,}025}$=2,201, $t_{21,\,0{,}025}$=2,08, $f^U_{10,15,\ 0{,}025}$=3,060, $f^U_{3,7,\ 0{,}05}$=4,347, $f^U_{4,8,\ 0{,}05}$=3,838 και $f^U_{2,12,\ 0{,}05}$=3,89.

ΓΡΑΨΕΤΕ ΔΥΟ ΑΠΟ ΤΑ ΤΡΙΑ ΘΕΜΑΤΑ. Μπορείτε να φύγετε σε μισή ώρα (χωρίς τα θέματα). Αν θέλετε να πάρετε τα θέματα πρέπει να περιμένετε μέχρι τις 6:30.

Όπου χρειάζεται το επίπεδο σημαντικότητας α, και δεν δίδεται, θεωρείστε ότι α=0.05.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!